

Министерство образования и науки РФ

ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

УДК

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по науке  
\_\_\_\_\_ Кружаев В.В.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2013

## ОТЧЕТ

### О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

В рамках выполнения п.1.2.2.3 Плана реализации мероприятий Программы развития  
УрФУ на 2013 год

ПО ТЕМЕ:

Сложные колебательные режимы и их бифуркации

в нелинейных дискретных моделях финансовой стохастической динамики

(Заключительный)

Зам зав.кафедрой

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

\_\_\_\_\_

Научный руководитель

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

\_\_\_\_\_

Исполнитель

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

\_\_\_\_\_

Екатеринбург 2013

## Реферат

1. ФИО автора : Сысолятина Анна Аркадьевна  
Sysolyatina Anna
2. Аннотация: В работе рассматривается нелинейная дискретная макроэкономическая модель бизнес-циклов Калдора. Исследованы различные режимы динамики детерминированного и стохастического вариантов. С использованием функции стохастической чувствительности проанализировано воздействие случайных возмущений на систему, построены доверительные эллипсы для равновесий и цикла.  
Annotation: In this paper the nonlinear discrete macroeconomic model of business cycles Kaldor. Investigated the dynamics of the different modes of deterministic and stochastic variants. With the use of the function of the stochastic sensitivity is analyzed the impact of random disturbances on the system, are constructed confidence ellipses for equilibrium and cycle.
3. Ключевые слова: модель Калдора, бизнес-циклы, случайные возмущения, функция стохастической чувствительности, доверительные эллипсы  
Key words: Kaldor model, business cycles, random perturbations, the function of stochastic sensitivity, confidence ellipses
4. Тема отчета: Сложные колебательные режимы и их бифуркации в нелинейных дискретных моделях финансовой стохастической динамики.  
Subject report: Difficult oscillatory modes and their bifurcations in nonlinear discrete stochastic models of financial dynamics.

## Содержание

Введение.....	4
Основная часть.....	5
1. Анализ режимов динамики нелинейной дискретной системы Калдора.....	5
2. Функция стохастической чувствительности и доверительные эллипсы рассеивания....	8
Заключение.....	14
Список использованных источников.....	15
Приложение.....	16

## Введение

В данной работе рассматривается дискретная макроэкономическая модель Калдора [1], описывающая динамическое взаимодействие между инвестициями и сбережениями.

$$y_{t+1} = y_t + \alpha(I_t - S_t) + \varepsilon\xi_{1,t}, \quad (1)$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + I_t + \varepsilon\xi_{2,t}, \quad (2)$$

В этой модели инвестиции  $I$  и сбережения  $S$  являются функциями потока доходов  $y$  и запаса капитала  $k$ :  $I = -\gamma k + \arctan(y - \mu) + \sigma\mu\left(1 + \frac{\gamma}{\delta}\right)$ ,  $S = \sigma y$ , на уровне которых наблюдаются циклические колебания.

Уравнение (1) описывает динамику дохода, который увеличивается, когда инвестиции превышают сбережения, и уменьшается, когда инвестиции становятся меньше сбережений. Второе уравнение описывает рост фондового капитала. В системе есть параметр  $\alpha$ , который определяет скорость регулирования агрегированного рынка капитала и потребительских товаров. Остальные параметры системы таковы:  $\delta$  – норма амортизации основных фондов капитала,  $0 < \delta < 1$ ,  $\sigma$  – склонность к сбережению,  $0 < \sigma < 1$ ,  $\gamma$  – стоимость регулирования капитала до требуемого уровня,  $\gamma > 0$ ,  $\mu$  – ожидаемый уровень выхода,  $\mu > 0$ ,  $\xi_{1,t}$ ,  $\xi_{2,t}$  – последовательности независимых гауссовых случайных величин,  $E\xi_{1,t} = E\xi_{2,t} = 0$ ;  $E\xi_{1,t}^2 = E\xi_{2,t}^2 = 1$ ;  $E\xi_{1,t}\xi_{2,t} = 0$ , а  $\varepsilon$  – интенсивность шумов.

Исследован детерминированный вариант системы, определено, что возможно одно или три стационарных равновесия. Модель экономики, допускающая несколько стационарных состояний, представляет интерес с точки зрения управления. Такая модель позволяет описать возможные переходы между стационарными состояниями посредством изменения значений параметров системы. В системе наблюдаются циклы, которые в зависимости от параметра могут быть непрерывными или дискретными.

Исследована динамика системы Калдора в присутствии случайных возмущений. При случайных воздействиях решение системы покидает детерминированный аттрактор и формирует вокруг него соответствующий стохастический аттрактор. Для анализа вероятностных свойств стохастических аттракторов использовался метод функций стохастической чувствительности [2]. Проведен детальный параметрический анализ стохастических равновесий и циклов этой модели.

## Основная часть

### 1. Анализ режимов динамики нелинейной дискретной системы Калдора

Исследован детерминированный вариант системы ( $\varepsilon = 0$ ). Система имеет экспоненциально устойчивое равновесие  $\bar{y}$ ,  $\bar{k}$ , координаты которого удовлетворяют системе:

$$y = \mu + \frac{1}{\sigma(1+\frac{\gamma}{\delta})} \arctan(y - \mu), \quad (3)$$

$$k = \frac{\sigma}{\delta} y. \quad (4)$$

При значении параметра  $\sigma > \frac{\delta}{\delta+\gamma}$  система имеет одно положение равновесия (P), при  $\sigma < \frac{\delta}{\delta+\gamma}$  – три стационарных равновесия (P, Q, R).

Устойчивость равновесий определяется из неравенств  $|\lambda_1^F| < 1$ ,  $|\lambda_2^F| < 1$ , где  $\lambda_1^F$ ,  $\lambda_2^F$  – собственные числа системы первого приближения

$$F = \begin{bmatrix} 1 - \alpha\sigma + \frac{\alpha}{1+(\bar{y}-\mu)^2} & -\alpha\gamma \\ \frac{1}{1+(\bar{y}-\mu)^2} & 1 - \delta - \gamma \end{bmatrix}.$$

Бифуркационная диаграмма для системы (1, 2) изображена на рисунке 1. В зоне 1 наблюдается единственное равновесие типа устойчивый узел; в зоне 2 – устойчивый фокус; в зонах 3, 6 – предельный цикл; в зоне 4 существуют 2 положения равновесия (Q, R) типа устойчивый узел, положение P в этой зоне неустойчиво; в зоне 5 положения Q, R – устойчивый фокус, равновесие P – неустойчиво.

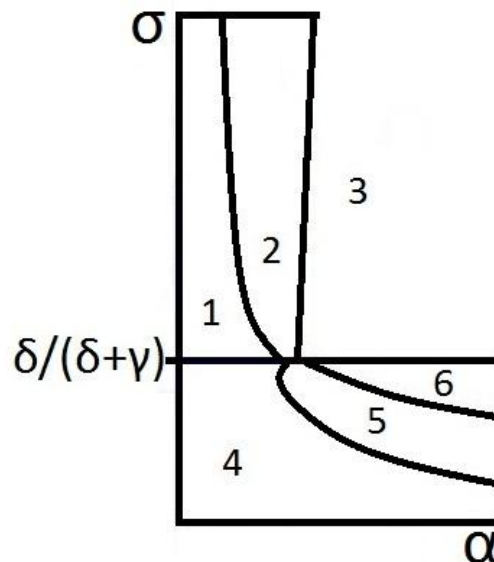


Рис. 1 Бифуркационная диаграмма  $\delta = 0.2$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\mu = 100$ ,  $\varepsilon = 0$ .

При увеличении скорости адаптации  $\alpha$  система подвергается бифуркации Неймарка-Сакера. На рисунке 1 это отображает кривая, которая разделяет зоны 2 и 3.

Для детерминированной системы (1, 2) в случае одного положения равновесия при фиксированных параметрах  $\delta = 0.2$ ,  $\sigma = 0.8$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\mu = 100$  имеем следующую бифуркационную диаграмму (Рис. 2). В зоне 1 наблюдается равновесие типа устойчивый узел; в зоне 2 – устойчивый фокус; в зонах 3 – предельные непрерывные циклы, в зонах 4 дискретные циклы, в зонах 5 – хаос.

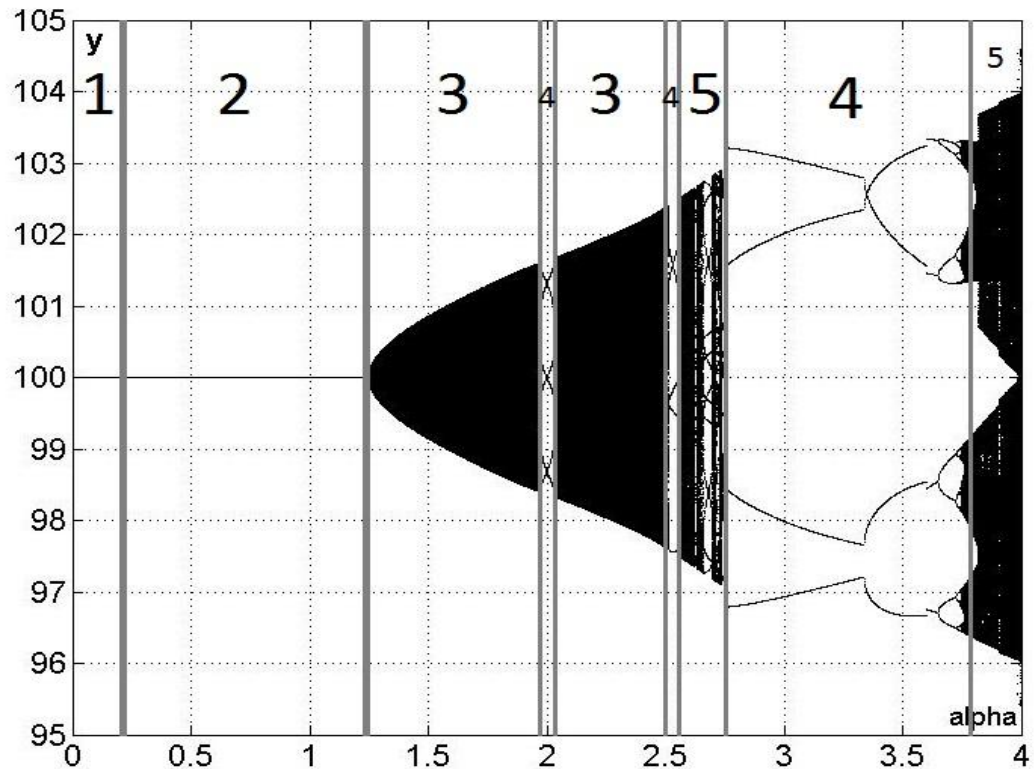


Рис. 2 Бифуркационная диаграмма  $\delta = 0.2$ ,  $\sigma = 0.8$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\mu = 100$ ,  $\varepsilon = 0$   
случай одного положения равновесия

В уравнении динамической системы были зафиксированы все параметры, кроме скорости адаптации  $\alpha$ , так как от задания этого параметра зависит характер реализующегося в системе режима. Показатель Ляпунова характеризует поведение изначально близких точек в фазовом пространстве. Для систем с дискретным временем отрицательный показатель Ляпунова соответствует тому, что точки сближаются, имеет место устойчивость, и возникает стационарный или периодический режим. Если же показатель положителен, то изначально близкие точки расходятся, и при динамике в ограниченной области фазового пространства реализуется хаос. В случае, когда показатель Ляпунова равен 0, происходит бифуркация. На рисунке 3 изображены значения показателя Ляпунова в зависимости от изменения параметра  $\alpha$ .

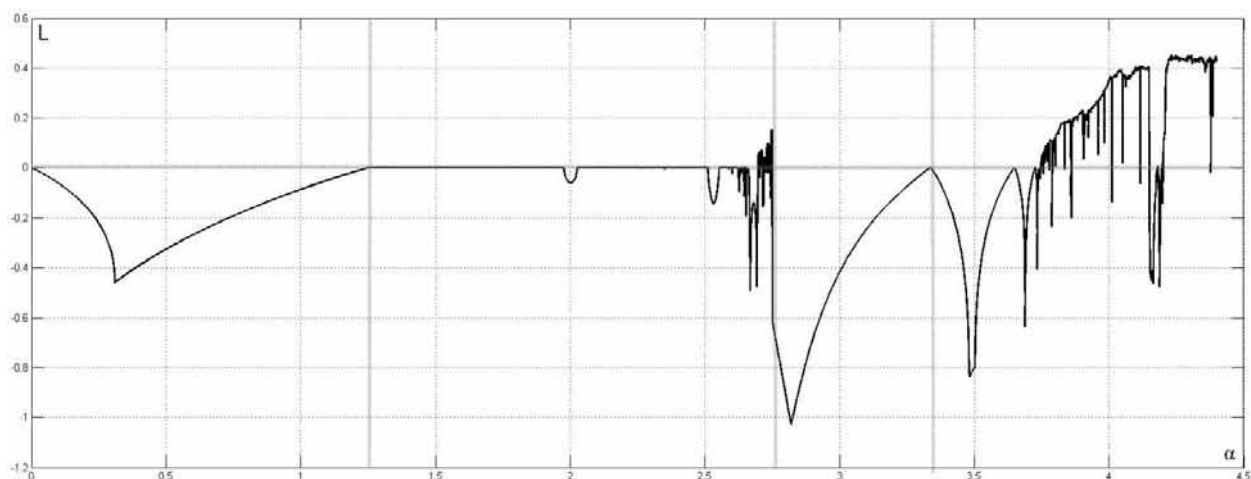


Рис. 3 Показатель Ляпунова при  $\delta = 0.2$ ,  $\sigma = 0.8$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\mu = 100$ ,  $\varepsilon = 0$

При значении  $\alpha \approx 1.25$  происходит бифуркация Неймарка-Сакера. Слева от этого значения точка равновесия является устойчивой, а затем она теряет устойчивость, и появляется устойчивый предельный цикл с правой стороны. Предельный цикл соответствует бизнес циклу в моделируемой экономике.

Подробно рассмотрена зона кратного цикла. В зоне 1 на рисунке 4 четырехцикл устойчивый. Затем происходит бифуркация, и возникает новый четырехцикл, который отличается от предыдущего тем, что его изображение не является непрерывным относительно изменения параметра  $\alpha$ . Далее вновь происходит бифуркация, и из четырехцикла рождается восьмицикл и т.д.

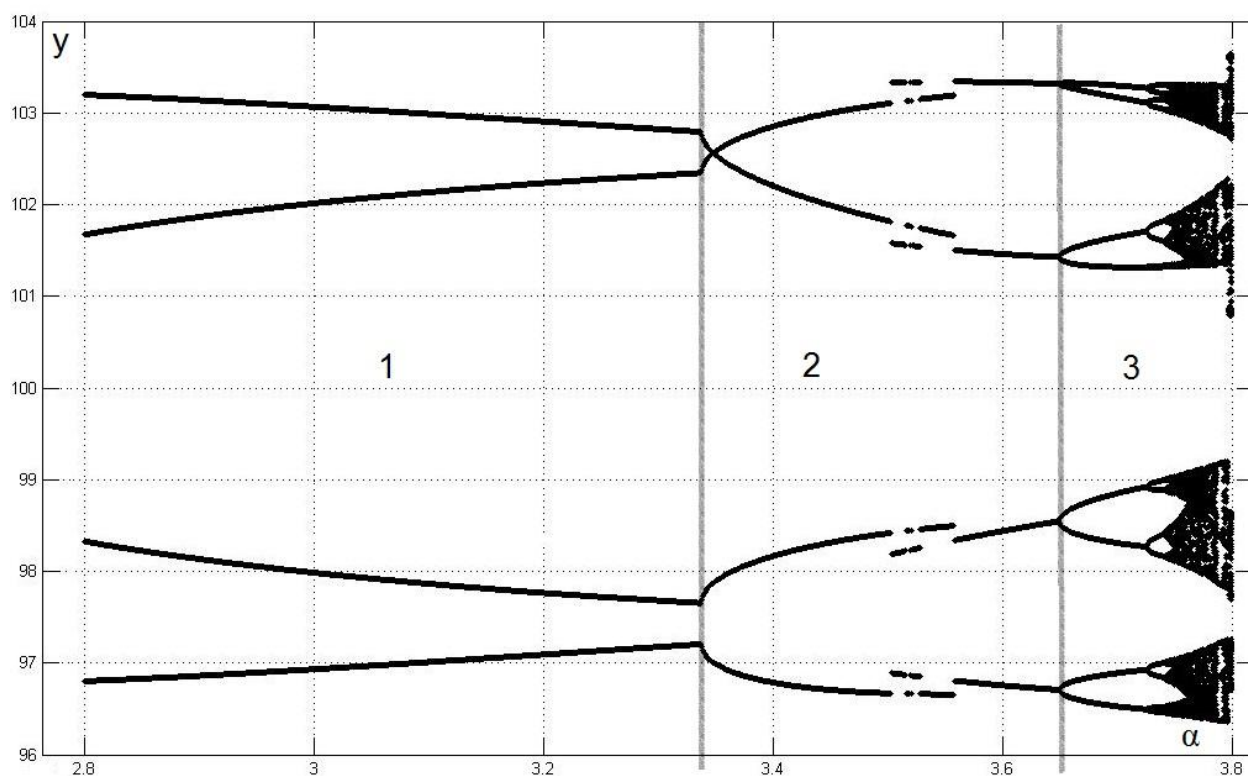


Рис. 4 Бифуркационная диаграмма  $\delta = 0.2$ ,  $\sigma = 0.8$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\mu = 100$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $2.8 < \alpha < 3.8$

По мере прохождения бифуркационных значений картина усложняется, затем цикл теряет устойчивость и следует область хаоса. Аттракторы в этом случае начинают выглядеть как множества, состоящие из сплошных интервалов. В этой зоне видны и просветы, в которых снова можно увидеть кратные циклы, то есть в закритической области наблюдается сложная картина сочетания квазипериодических и периодических режимов. На рисунке 5 указана подробнее зона в значении параметра  $3.785 < \alpha < 3.795$ . Видно, что периодический цикл имеет кратность 12.

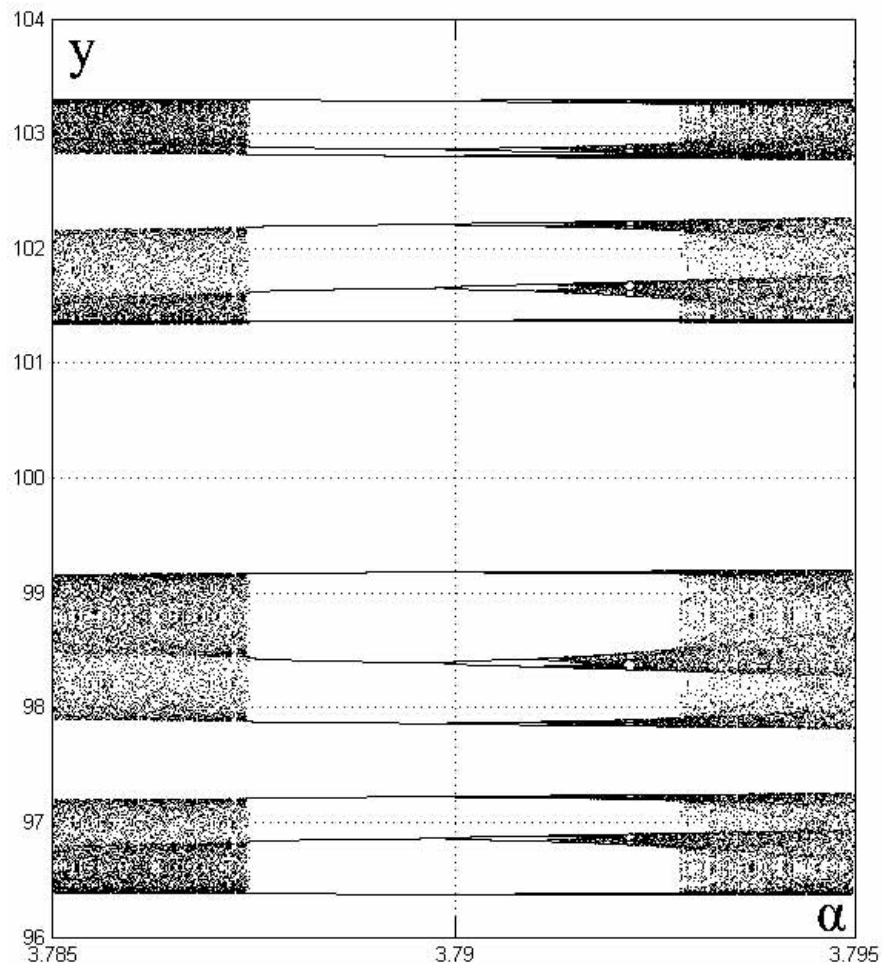


Рис. 5 Бифуркационная диаграмма  $\delta = 0.2$ ,  $\sigma = 0.8$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\mu = 100$ ,  $\varepsilon = 0$

## 2. Функция стохастической чувствительности и доверительные эллипсы рассеивания

Исследована динамика системы Калдора в присутствии случайных возмущений. Бифуркационная диаграмма при фиксированных параметрах  $\delta = 0.2$ ,  $\sigma = 0.8$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\mu = 100$ ,  $\varepsilon = 0.018$  изображена на рисунке 6. Видно, что при данных параметрах после случайных воздействий решение системы покидает детерминированный аттрактор и



формирует вокруг него соответствующий стохастический аттрактор. В зоне равновесия и цикла кратности 4 видна закономерность, что чем больше значение параметра  $\alpha$ , тем больше разброс случайных состояний системы.

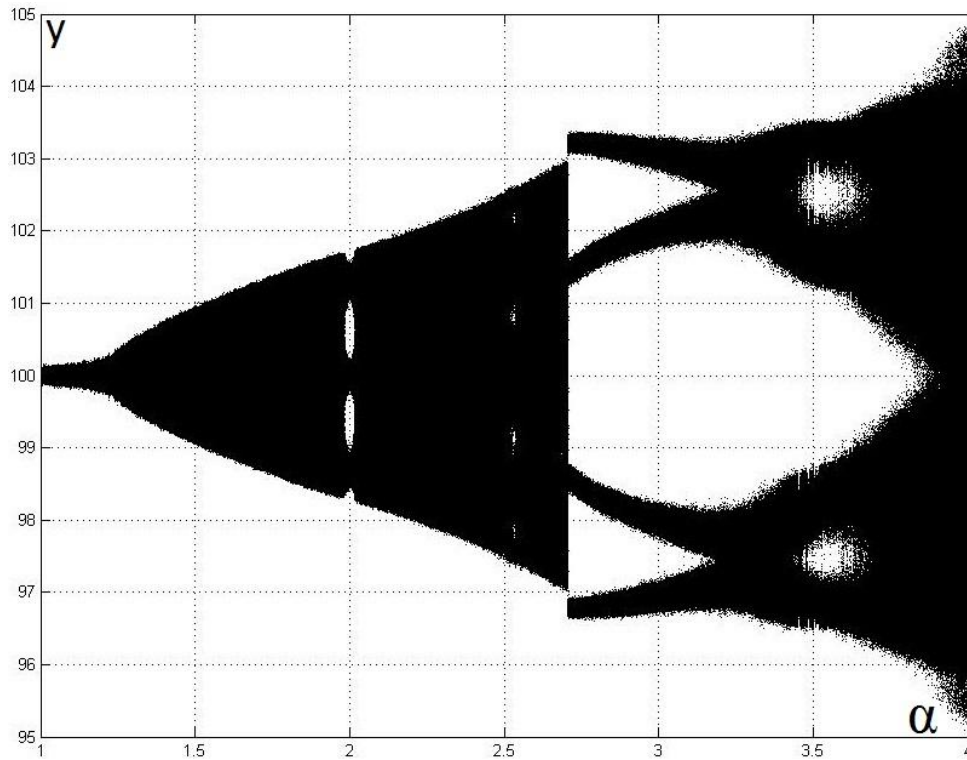


Рис. 6 Бифуркационная диаграмма при  $\delta = 0.2$ ,  $\sigma = 0.8$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\mu = 100$ ,  $\varepsilon = 0.018$ .

В случае экспоненциальной устойчивости положений равновесия детерминированной системы матрица стохастической чувствительности может быть найдена из уравнения:

$$W = FWF^T + Q,$$

где  $F$  – матрица системы первого приближения, а  $Q$  определяется параметрами шумов.

Для модели (1, 2)

$$F = \begin{bmatrix} 1 - \alpha\sigma + \frac{\alpha}{1+(\bar{y}-\mu)^2} & -\alpha\gamma \\ \frac{1}{1+(\bar{y}-\mu)^2} & 1 - \delta - \gamma \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

На рисунке 3а) представлены графики элементов  $w_{ij}$  матрицы  $W$  для системы (1, 2) в зависимости от параметра  $\alpha$ . Остальные параметры системы фиксированы. Собственные числа  $\lambda_1^W, \lambda_2^W$  матрицы  $W$  изображены на рисунке 3б).

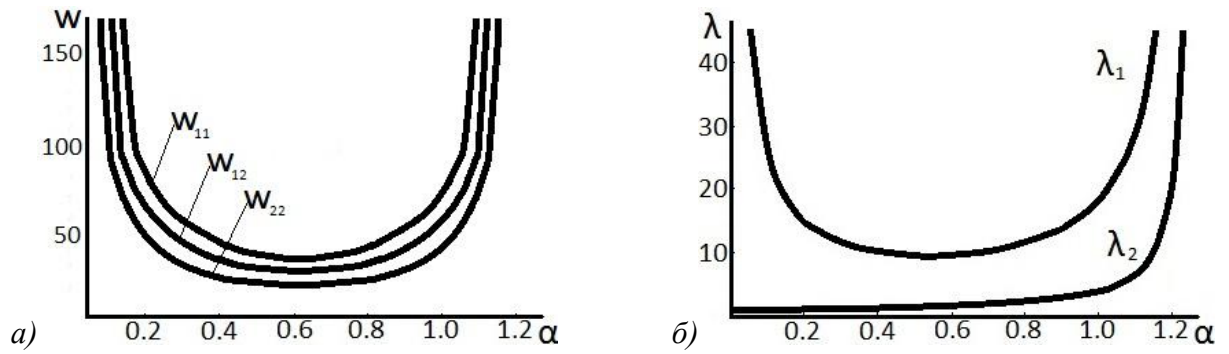


Рис. 7. Функция стохастической чувствительности (а),  
собственные числа матрицы  $W$  (б) при  $\delta = 0.2$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\mu = 100$

При изменении параметра  $\alpha$  стохастическая чувствительность аттракторов системы Калдора существенно меняется, что проиллюстрировано на рисунке 4.

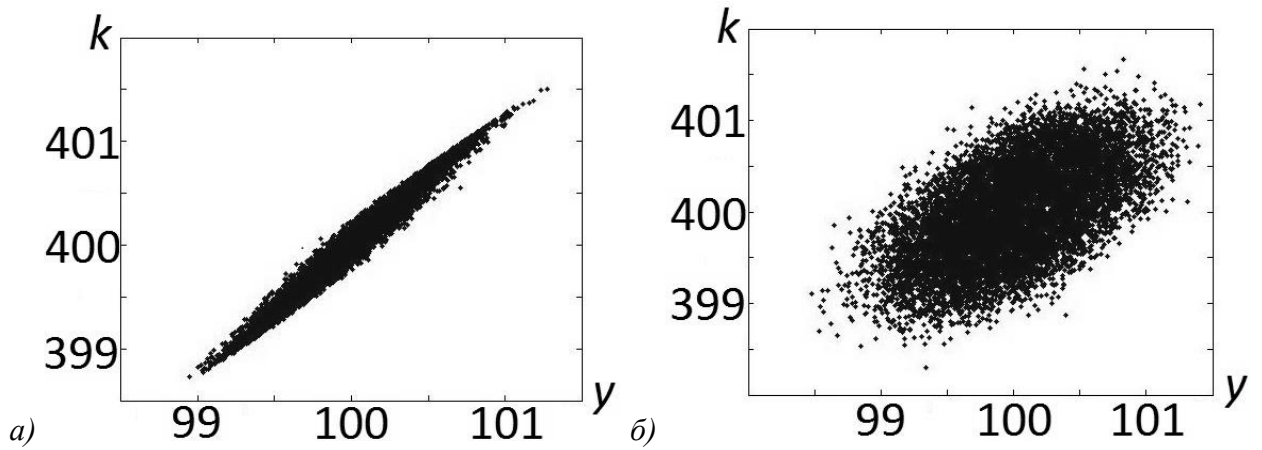


Рис. 8. Случайные состояния системы при  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\mu = 100$ ,  $\sigma = 0.8$ ,  
а)  $\alpha = 0.3$ , б)  $\alpha = 1$

В случаях циклов кратности  $m$  детерминированной системы матрицы стохастической чувствительности могут быть найдены из уравнений:

$$W_1 = BW_1B^T + Q, W_i = F_iW_iF_i^T + Q,$$

где  $B = \prod_{i=1}^m F_i$ ,  $F_i$  – матрица системы первого приближения,  $i = 2, \dots, m$ , а  $Q$  определяется параметрами шумов.

На рисунках 9 а), в), д), ж) представлены графики элементов  $w_{k,l}^i$  матрицы  $W_i$  для системы (1, 2) в зависимости от параметра  $\alpha$ . Верхняя кривая на этих графиках показывает изменение  $w_{11}^i$ , средняя  $w_{12}^i$ , нижняя  $w_{22}^i$ . Остальные параметры системы фиксированы. Собственные числа  $\lambda_1^{W_i}$ ,  $\lambda_2^{W_i}$  матрицы  $W_i$  изображены на рисунках 9 б), г), е), з). Верхняя кривая на этих графиках показывает изменение  $\lambda_1^{W_i}$ , нижняя  $\lambda_2^{W_i}$ .

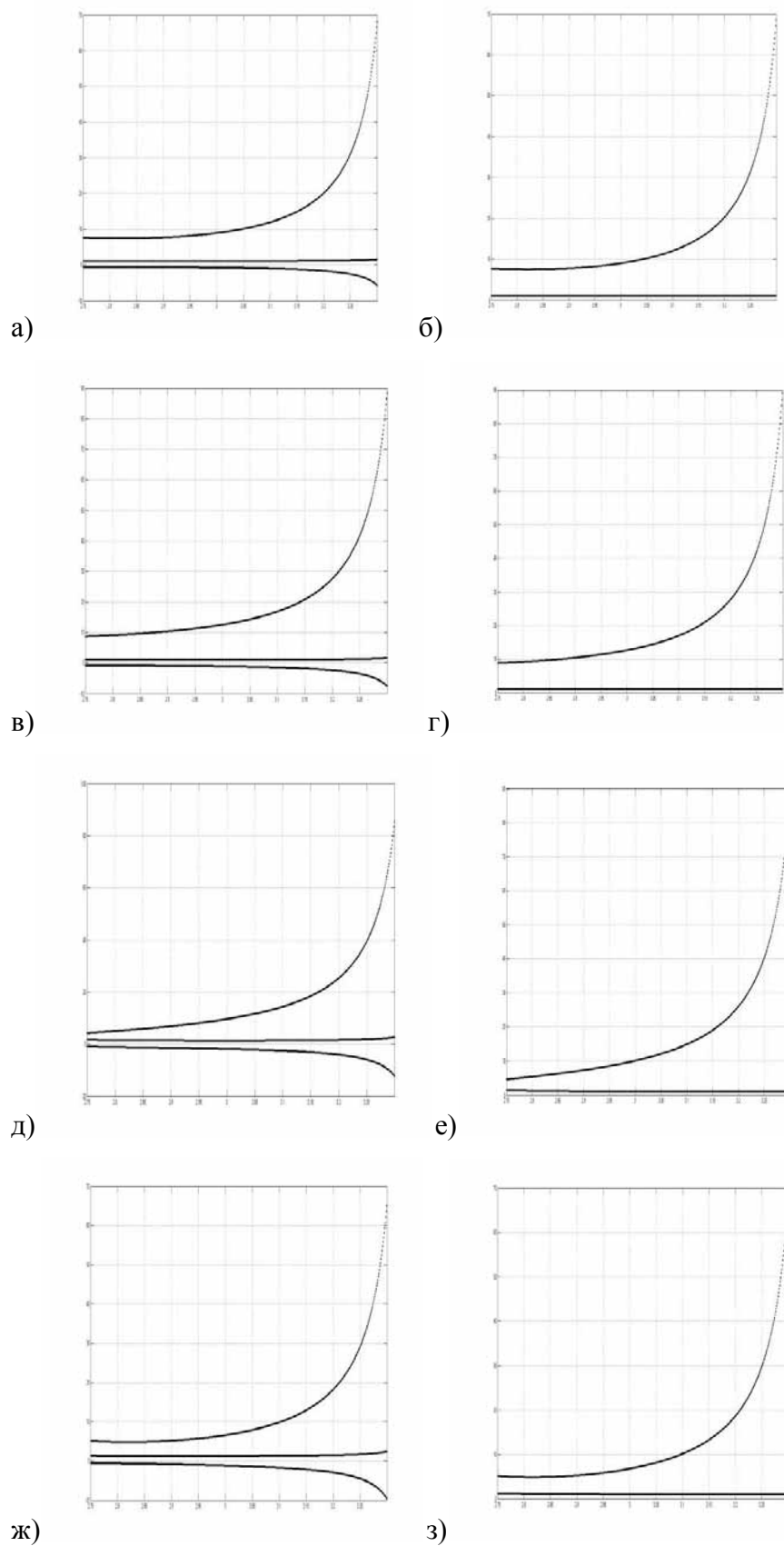


Рис. 9. Функция стохастической чувствительности, собственные числа матриц  $W_i$

при  $i=1(a, б), 2(в, г), 3(д, е), 4(ж, з), \delta = 0.2, \gamma = 0.6, \mu = 100$

Матрица  $W$  характеризует стохастическую чувствительность аттракторов системы при фиксированной интенсивности  $\varepsilon$  действующих шумов. При увеличении

интенсивности разброс случайных состояний системы увеличивается. Можно проследить следующую закономерность: при увеличении разницы между величинами собственных чисел матрицы стохастической чувствительности увеличивается зона рассеивания состояний системы.

Полученные матрицы чувствительности позволили построить эллипсы рассеивания случайных состояний системы вокруг каждой точки  $\bar{X}_l = (\bar{y}_l, \bar{k}_l)$  детерминированного  $k$ -цикла при заданном уровне шума. Уравнения эллипса записываются в следующем виде

$$(X - \bar{X}_l)^T (W_l)^{-1} (X - \bar{X}_l) = 2c^2 \varepsilon^2,$$

где  $W_l$  матрица чувствительности для точки  $\bar{X}_l$ . Значение  $c$  находится из уравнения

$$P = 1 - e^c,$$

где  $P$  доверительная вероятность.

Таким образом можно построить доверительный эллипс для произвольной точки цикла, зная только матрицу чувствительности в данной точке.

На рисунке 11 приведены эллипсы для точки покоя с различной степенью доверия.

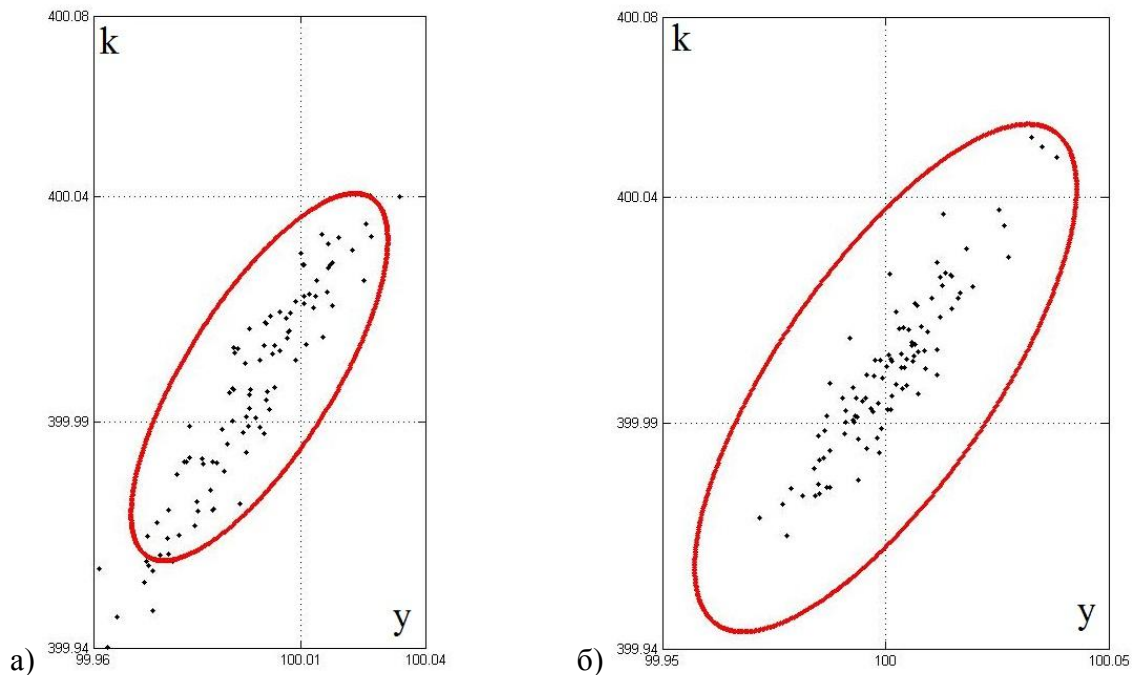


Рис. 10. Случайные состояния системы и эллипсы рассеивания при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\mu = 100$ ,  $\sigma = 0.8$ ,  $\alpha = 0.5$ , а)  $P = 0.7$ , б)  $P = 0.9$

Эллипсы рассеивания дают наглядное представление пространственной неоднородности отклонений возмущенных траекторий от аттрактора. На рисунках 12, 13 изображены эллипсы для четырехцикла при значении параметра в начале и конце интервала структурной устойчивости, то есть при малой чувствительности точек к

возмущению. В случае достаточно высокого уровня внешнего шума, когда точки детерминированного аттрактора располагаются недалеко друг от друга, эллипсы, соответствующие различным точкам, начинают пересекаться и для четырех точек образуется одна область рассеивания. Таким образом, стохастический четырехцикл становится неотличим от стохастического равновесия.

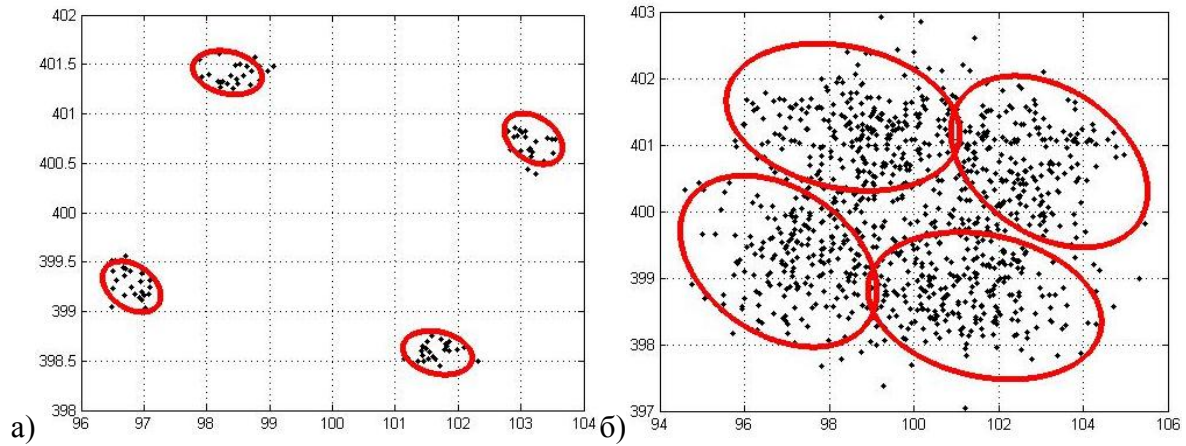


Рис. 11. Случайные состояния системы и эллипсы рассеивания при  $P = 0.9$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\mu = 100$ ,  $\sigma = 0.8$ ,  $\alpha = 2.8$ , а)  $\varepsilon = 0.1$ , б)  $\varepsilon = 0.5$

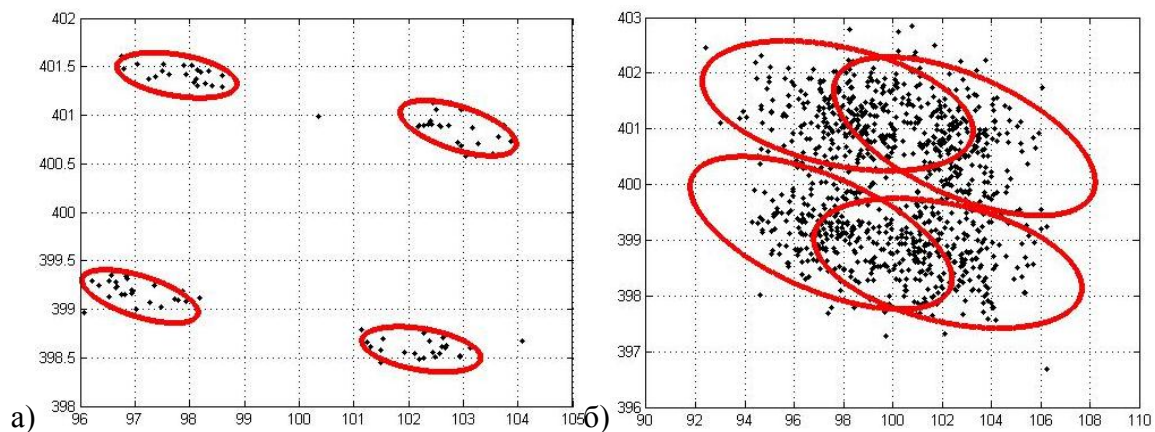


Рис. 12. Случайные состояния системы и эллипсы рассеивания при  $P = 0.9$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\mu = 100$ ,  $\sigma = 0.8$ ,  $\alpha = 3.2$ , а)  $\varepsilon = 0.01$ , б)  $\varepsilon = 0.05$

Вычисление чувствительности стохастического равновесия позволяет построить плотность вероятности случайных состояний системы при выбранном уровне внешнего шума. Плотность вероятности дает наглядное представление пространственной неоднородности отклонений возмущенных траекторий от детерминированной точки покоя.

## **Заключение**

Анализ стохастических аттракторов двумерных динамических систем предполагается проводить на базе модели экономических циклов «инвестиции - сбережения», представляющих собой перспективное и активно развивающееся направление теории динамических систем.

Был разработан программный комплекс, с помощью которого проведено исследование устойчивости равновесия и циклов системы, построена зависимость характеристического показателя от параметров, что позволило проанализировать особенности в динамике системы. Используя аппарат функции стохастической чувствительности, проведен анализ отклика аттракторов системы в зависимости от интенсивности и природы шума.

## **Список использованных источников**

1. Nicholas Kaldor A Model of the Trade Cycle // Economic Journal. Vol. 50, No. 197: 78-92, 1940.
2. Bashkirtseva I, Ryashko L., Tsvetkov I. Sensitivity analysis of the stochastic discrete systems//Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis. 2010. № 17. Pp. 501-515.
3. G.I.Bischi, R.Dieci, G.Rodano, E.Saltari Multiple attractors and global bifurcations in a Kaldor-type business cycle model // Evolutionary Economics 11, 527-554, 2001.
4. A. Agliari, R. Dieci, and L. Gardini Homoclinic Tangles in a Kaldor-like Business Cycle Model // Journal of Economic Behavior & Organization. Vol. 62: 324-347, 2007.

Список публикаций по теме исследования

№ п/п	Наименование работы, ее вид	Форма работы	Выходные данные	Объем в п.л. или с.	Соавторы
1.	Анализ стохастических аттракторов дискретной модели Калдора (тезисы)	печ.	XVI International Conference «Dynamical system modelling and stability investigation», Kiev, Ukraine, May 29-31, 2013., С.224	1 с.	Ряшко Л.Б.
2.	Бифуркации и стохастическая чувствительность бизнес-циклов (тезисы)	печ.	III Информационная школа молодого ученого: сб. научных трудов/ЦНБ УрО РАН, Екатеринбург, 2013., С.324-328	5 с.	Ряшко Л.Б.
3.	Стохастическая чувствительность равновесий и цикла дискретной модели Калдора (тезисы направлены в печать)	печ	Современные проблемы математики: тезисы Международной (45-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2013	3 с.	Ряшко Л.Б.